

Análisis I	2° Parcial	Cátedra única	Sede Drago	1º Cuat. 2011	ClasesATodaHora.com.ar
------------	------------	---------------	------------	---------------	------------------------

D ANÁLISIS (ING. Y EX.) 2^{do} PARCIAL 1^{er} CUATRIMESTRE DE 2011 Tema 1

APELLIDO NOMBRES DNI ..

INSCRIPTO EN: SEDE: 05 DÍAS: *lun-miér-jue* HORARIO: *10 a 13* AULA: *43*

NOTA del 1^{er} parcial: *9 (nueve)* Altillio.com

1	2	3	4	NOTA	PROMOCIONA	RECUPERA 7/7/11 10hs
<i>6</i>	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>6</i>	<i>10 (diez)</i>	<i>10</i>	1 ^{ra} 2 ^{da}
				<i>Chacabarro</i>	INSUFICIENTE	FINAL 15/7/11 10hs.

Los razonamientos usados para la resolución de los problemas deben figurar en la hoja.

1.- Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que la recta tangente al gráfico de $g(x)$ en el punto $(4, g(4))$ es $y = \frac{1}{2}x - 1$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = 3 + \int_4^x g(t)dt$ en $x_0 = 2$.

2.- Hallar $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $3f^2(x)f'(x) = 5 + \ln(x-2)$ y $f(3) = 1$.

3.- Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = xe^{x^2}$ y de $g(x) = xe^{x+12}$.

4.- Hallar todos los $a > 1$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 1}{5^n + n^2}$ es convergente.

$$1) (4, g(4)) \Rightarrow g(4) = \frac{1}{2}(4) - 1 = 1$$

Altillo.com

$$\Rightarrow (4, 1)$$

$$\Rightarrow g(4) = 1 \checkmark$$

~~$$f(x) = 3 + \int_4^{x^2} g(t) dt = 3 + g(2^2) \cdot 2x = 3 + g(4) \cdot 2x$$~~

Derivo f para armar el polinomio

~~$$f(x) = 3 + \int_4^{x^2} g(t) dt \Rightarrow f(2) = 3 + \int_4^4 g(t) dt = 3$$~~

$$f'(x) = \left(3 + \int_4^{x^2} g(t) dt \right)' \text{ teorema fundamental del cálculo}$$

$$\Rightarrow g(x^2) \cdot 2x \Rightarrow f'(2) = \underbrace{g(4)}_1 \cdot 4 = 4 \checkmark$$

$$f''(x) = g'(x^2) \cdot 2x \cdot 2x + 2g(x^2) \Rightarrow f''(2) = \underbrace{g'(4)}_{\text{pendiente de la recta tangente en } x_0=4} \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot g(4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 10 \checkmark$$

Armo el polinomio de Taylor

~~$$P_2(x) = 3 + 4(x-2) + 5(x-2)^2$$~~

$$P_2(x) = \frac{3}{0!} + \frac{4(x-2)}{1!} + \frac{10(x-2)^2}{2!}$$

$$P_2(x) = 3 + 4(x-2) + 5(x-2)^2 \checkmark$$

Integro a ambos miembros para hallar $f(x)$

$$\int 3 P_2(x) f'(x) dx = \int 5 + \ln(x-2) dx$$

Altillo.com

$$\Rightarrow 3 \int P_2(x) f'(x) dx = \int 5 dx + \int \ln(x-2) dx$$

$$\underbrace{\int f^2(x) f'(x) dx}_{(1)} - \underbrace{\int 5 dx}_{(2)} + \underbrace{\int \ln(x-2) dx}_{(3)}$$

$$(1) \int f^2(x) f'(x) dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + K = \frac{f^3(x)}{3} + K$$

Sustitución

$$u = f(x) \\ du = f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} + K = \underline{f^3(x) + K_1} \checkmark$$

$$(2) \int 5 dx = \underline{5x + K_2} \checkmark$$

$$(3) \int \ln(x-2) dx = \int \ln(u) du = \ln(u)u - \int \frac{1}{u} u du$$

Sustitución
 $u = x-2$

$$du = dx$$

Partes

$$f = \ln(u) \quad g' = 1$$

$$f' = \frac{1}{u}$$

$$g = u$$

$$= \ln(u)u - u + K_3$$

$$= \underline{\ln(x-2)(x-2) - (x-2) + K_3}$$

$$\Rightarrow f^3(x) = 5x + \ln(x-2)(x-2) - (x-2) + K$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{5x + \ln(x-2)(x-2) - (x-2) + K}$$

Condición inicial

$$f(3) = 1 \Leftrightarrow f(3) = \sqrt[3]{15 + \underbrace{\ln(1)(1)}_0 - (1) + K} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{15 - 1 + K} = 1 \Leftrightarrow 14 + K = 1 \Leftrightarrow \boxed{K = -13}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sqrt[3]{5x + (x-2)\ln(x-2) - (x-2) - 13}} \checkmark$$

$$3) f(x) = xe^{x^2} \quad g(x) = xe^{x+12}$$

Altillo.com

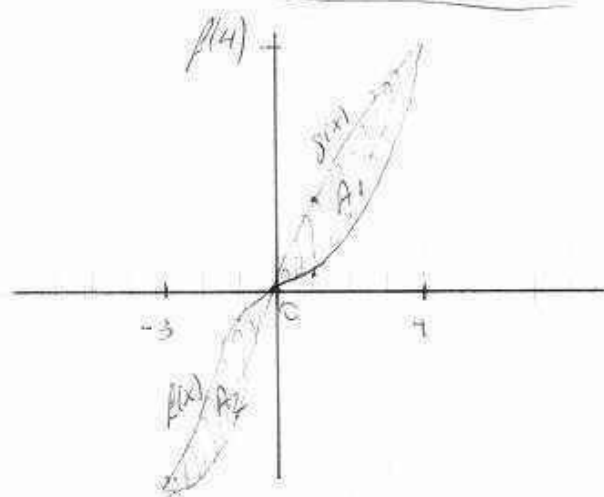
Busco las intersecciones de las funciones

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x e^{x^2} = x e^{x+12} \quad (x=0 \text{ no sirve})$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} = e^{x+12} \Leftrightarrow x^2 = x+12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

Hago un gráfico aproximado



$$\boxed{x=4} \quad \boxed{x=-3} \quad \boxed{x=0}$$

$$f(1) = 2,72 \dots \checkmark$$

$$g(1) > 2,72 \dots$$

$$f(4) = 35544442,08$$

$$g(4) = f(4)$$

$$f(-3) = -24309,29 \dots$$

$$g(-3) = f(-3)$$

$$f(-1) = 2,72 \dots$$

Por Bolzano entre los intervalos ~~(-3,0)~~ $(-3,0)$ y $(0,4)$ la función tendrá la que evaluando las funciones en un mismo punto el valor sea mayor, por lo tanto

$$A = A_2 + A_1 \Rightarrow A = \underbrace{\int_{-3}^0 f(x) - g(x) dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^4 g(x) - f(x) dx}_{(2)}$$

$$(1) \int_{-3}^0 x e^{x^2} - x e^{x+12} dx = \underbrace{\int_{-3}^0 x e^{x^2} dx}_{(A)} - \underbrace{\int_{-3}^0 x e^{x+12} dx}_{(B)} \checkmark$$

$$(2) \int_0^4 x e^{x+12} dx = \underbrace{\int_0^4 x e^{x^2} dx}_{(C)} - \underbrace{\int_0^4 x e^{x^2} dx}_{(D)} \checkmark$$

$$\textcircled{A} \int_{-3}^0 x e^{x^2} dx = \int_{-3}^0 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{-3}^0 = \left(\frac{1}{2} - 4051,54 \right) = -4051,04$$

Sustitución
 $u = x^2$

$du = 2x dx$

$\frac{1}{2} du = x dx$ ✓

$$\textcircled{B} \int_{-3}^0 x e^{x+12} dx = \int_{-3}^0 x e^u du = x e^u - \int e^u du = (x e^{x+12} - e^{x+12}) \Big|_{-3}^0$$

Sustitución

$u = x+12$

$du = dx$

Partes

$f = x \quad g' = e^u$

$f' = 1 \quad g = e^u$

$= -162754,79 - (-32412,34)$

$= -130342,45$ ✓

$$\textcircled{C} \int_0^4 x e^{x+12} dx = (x e^{x+12} - e^{x+12}) \Big|_0^4 = 26658331,56 - (-162754,79)$$

Lo mismo que B pero evaluado en distintos extremos

$= 26821086,35$

$$\textcircled{D} \int_0^4 x e^{x^2} dx = \left(\frac{1}{2} e^{x^2} \right) \Big|_0^4 = 4443055,26 - \frac{1}{2} = 4443054,76$$

Lo mismo que B pero cambiando los extremos

$\Rightarrow A = \textcircled{A} - \textcircled{B} + \textcircled{C} - \textcircled{D} = 22504323$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 1}{5^n + n^2}$$

Aplio el criterio de la raíz

Altillo.com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n + 1}{5^n + n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + 1}}{\sqrt[n]{5^n + n^2}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n (1 + \frac{1}{a^n})}}{\sqrt[n]{5^n (1 + \frac{n^2}{5^n})}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{a^n})} \rightarrow 1}{\sqrt[n]{5^n} \sqrt[n]{(1 + \frac{n^2}{5^n})} \rightarrow 1} = \frac{a}{5} \quad \text{con } a > 1 \quad \checkmark$$

Por el criterio de la raíz, la serie converge si $L < 1$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} < 1 \Leftrightarrow a < 5 \Leftrightarrow \cancel{a} < a < 5 \quad \checkmark$$

dado que $a > 1$

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall a \in (1, 5)$

Prueba con $a = 5$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 1}{5^n + n^2}$$

Aplio límite para probar condición necesaria de convergencia

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 1}{5^n + n^2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n (1 + \frac{1}{5^n})}{5^n (1 + \frac{n^2}{5^n})} = 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ con $a = 5$ ~~la serie~~ el término general de la serie no cumple la condición necesaria, por lo tanto ~~la serie~~ diverge

$$\Rightarrow \left\{ \text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + 1}{5^n + n^2} \text{ converge para todo } a \in (1, 5) \right\} \checkmark$$

