

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta.

- Determinar $k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+k)^{2n}}{(n^2+5)^n} = e^5$
- Se sabe que la recta tangente a f en $x_0=1$ es $y=3x+1$ y que la recta tangente a g en $x_1=4$ es $y=2x+1$. Hallar la recta tangente a $h(x)=g(f(3x+e^{2x}))$ en $x_2=0$.
- Demuestre que la ecuación $\ln(8x-3)=8x^2-1$ no tiene solución.
- Considere el gráfico de $f(x)=1+\sqrt{32-2x^2}$ y el punto $P=(3;1)$. Determine el dominio de f y halle analíticamente el punto del gráfico de f que está a la máxima distancia de P .

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+k)^{2n}}{(n^2+5)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(n+k)^2}{n^2+5} \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n^2+2kn+k^2}{n^2+5} \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{k^2+2kn+n^2-5}{n^2+5} \right]^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{2kn+k^2-5}{n^2+5} \right]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{n^2+5}{2kn+k^2-5}} \right]^n$$

¿por qué? Falta justificar

Vale porque $\frac{n^2+5}{2kn+k^2-5} \rightarrow \infty$

C.A.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2kn+k^2-5}{n^2+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2kn^2+k^2n-5n}{n^2+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2kn^2+k^2n-5n}{n^2+5} = 2k = 5$$

$$k = \frac{5}{2}$$

(Este límite debe ser 5 para que el lim. que nos piden sea e^5)

Resp

2) Recta tg de f en $x_0=1$: $y = \frac{f'(1)}{f(1)}x + \frac{f(1)-f'(1)}{f(1)}$

$$\Rightarrow f(1) = 4$$

$$f'(1) = 3$$

La derivada de f en $x=1$ es la pendiente de la recta tg

En $x=1$, la recta tg es la misma que la función.

Recta tg de g en $x_1=4$: $y = \frac{g'(4)}{g(4)}x + \frac{g(4)-g'(4)}{g(4)}$

$$\Rightarrow g(4) = 9$$

$$g'(4) = 2$$

$$h(x) = g(f(3x+e^{2x})) + 2$$

$$\Rightarrow h(0) = g(f(3 \cdot 0 + e^{2 \cdot 0})) + 2$$

hallar la recta tg de h en $x_2=0$.

~~h'(0) = g'(f(1)) + 2~~

$$h'(0) = g'(f(1)) + 2$$

$$h'(0) = g'(4) + 2$$

$$h'(0) = 9 + 2$$

$$h'(0) = 11$$

$$h'(x) = g'(f(3x+e^{2x})) \cdot f'(3x+e^{2x}) \cdot (3+e^{2x} \cdot 2) \rightarrow \text{para la recta de la tangente.}$$

$$\rightarrow h'(0) = g'(f(3 \cdot 0 + e^{2 \cdot 0})) \cdot f'(3 \cdot 0 + e^{2 \cdot 0}) \cdot (3 + e^{2 \cdot 0} \cdot 2)$$

$$h'(0) = g'(f(1)) \cdot f'(1) \cdot (3 + 2)$$

$$\text{recta tg a } h(x) \text{ en } x_2=0 : y = h'(0)(x-0) + h(0)$$

$$h'(0) = g'(4) \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{R.T.A.: } y = 30x + 11$$

$$h'(0) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$h'(0) = 30$$

HOJA 1

$$3) \quad \overbrace{\ln(8x-3)}^{g(x)} = \overbrace{8x^2-1}^{h(x)}$$

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

$(f(x))$ es la dist. parcial entre estas 2 funciones. As $f(x)$ se anula en algún x , la ecuación tiene solución.

$$f(x) = \ln(8x-3) - 8x^2 + 1$$

$$Df: \mathbb{R} > 3/8$$

$$8x-3 > 0 \quad (\text{el ln debe ser } > 0)$$

$$8x > 3$$

$$x > \frac{3}{8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{8x-3} \cdot 8 - 16x$$

$$f'(x) = \frac{8}{8x-3} - 16x$$

$$Df': \mathbb{R} > 3/8$$

(en realidad, el Df' son los $\mathbb{R} - \{3/8\}$, pero si $Df' \in Df$)

No

Sí

$$f'(x) = \frac{8 - 16x(8x-3)}{8x-3}$$

$$f'(x) = \frac{8 - 128x^2 + 48x}{8x-3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8 - 128x^2 + 48x}{8x-3} = 0$$

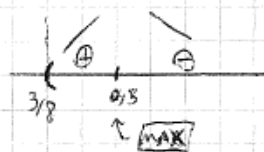
(Hallar las raíces críticas, según el teorema de FERMAT)

$$-128x^2 + 48x + 8 = 0$$

$$x_1 = 0,175$$

$$x_2 = 0,5$$

$$x_1 \notin Df$$



Usando f' continua

$$f'(0,1) > 0 \Rightarrow \text{por ser } f \text{ cont en } (3/8, +\infty) \text{ y derivable en } (3/8, +\infty), \text{ x ROLLE, } \forall x \in (3/8, 1/2), f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ X los consecuentes del Teorema del Valor Medio, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(3/8, 1/2)$.

$f'(0,1) < 0 \Rightarrow$ por ser f conv. en $(\frac{1}{2}, +\infty)$ y derivable en $(\frac{1}{2}, +\infty)$, x ROLLO, $\forall x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ x por consecuencias del TVM, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

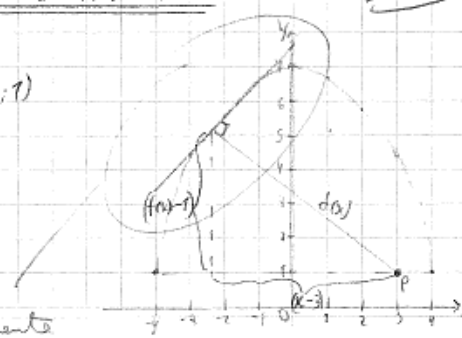
$\Rightarrow f(0,5)$ es un máximo absoluto en su dominio $\Rightarrow f(0,5) > f(x)$ ✓

$f(0,5) = -1 \Rightarrow f(x)$ nunca toma valores mayores a $-1 \Rightarrow f(x)$ nunca es positiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la ecuación $\ln(3x-3) = 3x^2 - 1$ no tiene solución. Bien

1) $f(x) = 1 + \sqrt{32 - 2x^2}$ $P = (3, 1)$

$Df: [-4; 4]$ ✓



No necesariamente
 $\perp$ a recta tang.?

$32 - 2x^2 \geq 0$

$2x^2 \leq 32$

$x^2 \leq 16$

$|x| \leq 4$

$-4 \leq x \leq 4$ ✓

NOTA

dist del punto P a ~~un punto~~ un punto del gráfico de $P(x)$:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (f(x)-1)^2}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-3)^2 + (f(x)-1)^2}} \cdot ((x-3)^2 + (f(x)-1)^2)'$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-3)^2 + (f(x)-1)^2}} \cdot (2(x-3) + 2(f(x)-1) \cdot f'(x))$$

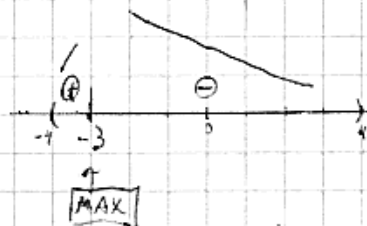
$$d'(x) = \frac{2x-6 + 2(\sqrt{32-2x^2}) \cdot \frac{-2x}{\sqrt{32-2x^2}}}{2\sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{32-2x^2})^2}}$$

$$d'(x) = \frac{2x-6-4x}{2\sqrt{(x-3)^2 + 32-2x^2}}$$

$$d'(x) = \frac{-2x-6}{2\sqrt{(x-3)^2 + 32-2x^2}}$$

$$d'(x) = \frac{-x-3}{\sqrt{(x-3)^2 + 32-2x^2}}$$

$$\mathcal{D} d': (-4, 4), \text{ porque } \mathcal{D} d' \subseteq \mathcal{D} f$$



$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow -x-3 = 0$$

$$-x = 3$$

$$x = -3 \in \mathcal{D} f \checkmark$$

$d'(-3, 5) > 0 \Rightarrow \forall x \in (-4, -3), d'(x) > 0 \Rightarrow d(x)$ es estrictamente creciente en $(-4, -3)$
 (fuerza de d' en y hacia x)
 $d'(0) < 0 \Rightarrow \forall x \in (-3, 4), d'(x) < 0 \Rightarrow d(x)$ es estrictamente decreciente en $(-3, 4)$

$d(-3)$ es un MAX

$$f(-3) = 1 + \sqrt{32 - 2(-3)^2}$$

$$f(-3) \approx 4,77$$

RTA: El punto a la más distancia de P es el punto: $(-3; f(-3))$

$$(-3; 4,77)$$

Es un valor aprox.

El valor exacto es $1 + \sqrt{14}$.

Buen.

